JEU-CONCOURS N° 47

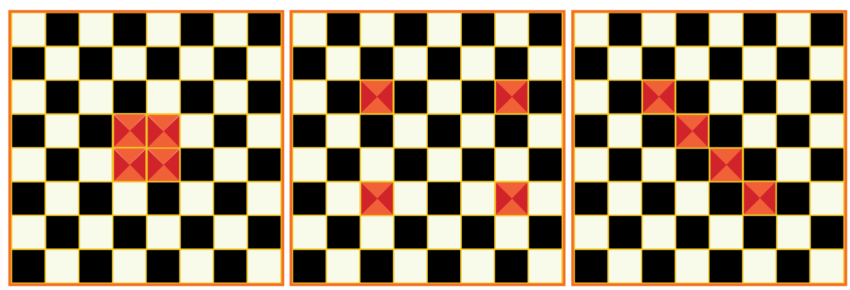
PIERRE TOUGNE

Promenades sur l'échiquier

Soit un pion dans le coin supérieur gauche d'un échiquier, qui ne peut se déplacer que d'une case vers le bas ou d'une case vers la droite. Il y a 3 432 chemins différents pour atteindre la case inférieure droite. Pouvez-vous calculer ce nombre de chemins sur les trois échiquiers ci-dessous où les cases rouges lui sont interdites? Si l'on autorise en plus le pion à se déplacer en diagonale vers la droite et en bas, ce nombre de chemins atteint 48 639. Que deviennent les réponses précédentes dans ce cas?

Question subsidiaire : sur un damier français (10×10), selon sa case de départ sur la première rangée, combien de façons le pion a-t-il d'aller à dame? On suppose naturellement qu'il n'y a pas d'autres pions sur le damier et le pion ne se déplace qu'en diagonale et ne peut reculer.

Envoyez vos réponses aux questions sur carte postale à *Pour la Science*, 8, rue Férou, 75006 Paris. Parmi les réponses exactes reçues pendant le mois de mai 1998, dix gagnants tirés au sort recevront un livre.



RÉPONSE AU JEU-CONCOURS N° 45

Les notations étant celles de la figure ci-dessous, le théorème de Pythagore appliqué au triangle $C_nC_{n+1}M$ donne $(r_n + r_{n+1})^2 = (r_n - r_{n+1})^2 + C_{n+1}M^2$, c'est-à-dire $C_{n+1}M = I_n I_{n+1} = 2(r_nr_{n+1})^{1/2}$. De même, $I_nI_{n+2} = 2(r_nr_{n+2})^{1/2}$ et $I_{n+2}I_{n+1} = 2(r_{n+2}r_{n+1})^{1/2}$, soit en remplaçant dans l'égalité $I_nI_{n+1} = I_nI_{n+2} + I_{n+2}I_{n+1}$, on obtient après simplification par 2 : $(r_nr_{n+1})^{1/2} = (r_nr_{n+2})^{1/2} + (r_{n+1}r_{n+2})^{1/2}$ que l'on peut réécrire : $1/r_{n+2}^{1/2} = 1/r_{n+1}^{1/2} + 1/r_n^{1/2}$. (1). D'autre part, I_{n+2} divise le segment I_nI_{n+1} dans le rapport $(r_n/r_{n+1})^{1/2}$, en effet, $I_{n+2}I_n/I_{n+2}I_{n+1} = I_nI_{n+1}/I_{n+2}I_{n+1} - 1 = (r_n/r_{n+2})^{1/2} - 1 = r_n^{1/2}(1/r_{n+2}^{1/2} - 1/r_n^{1/2}) = (r_n/r_{n+1})^{1/2}$. Si l'on désigne par x_n, x_{n+1} et x_{n+2} les abscisses de I_n, I_{n+1} et I_{n+2}, la relation précédente s'écrit : $(x_{n+2} - x_n)/(x_{n+1} - x_{n+2}) = (r_n/r_{n+1})^{1/2}$ que l'on peut mettre sous la forme : $x_{n+2}/r_{n+2}^{1/2} = x_{n+1}/r_{n+1}^{1/2} + x_n/r_n^{1/2}$ (2).

Posons $u_n = 1/r_n^{1/2}$, on a $u_0 = u_1 = 1$ et (1) devient $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, c'est-à-dire la suite de Fibonacci donc $1/r_n^{1/2} = F_n$ ou encore $r_n = 1/F_n^2$. De même, si l'on pose $v_n = x_n/r_n^{1/2}$, on a $v_0 = 0$, $v_1 = 2$ et (2)devient $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, soit encore la suite de Fibonacci à un facteur 2 près et décalée d'un rang, donc $x_n/r_n^{1/2} = 2F_{n-1}$ ou encore $x_n = 2F_{n-1}/F_n$. Quand n tend vers l'infini, x_n tend vers $2/\varphi = \sqrt{5} - 1$.